

[최고의 수험물리 전문가]

윤형철

변리사 탄탄물리

[개념+기출]

— 05장 운동량과 충격량 —

“물리는 외우는 과목이 아니라 생각하는 과목입니다.”

세 가지 강의 철학

목차

— 성장기반 물리

(Grow-based Physics)

— 취사선택 물리

(Cut-off Strategy Physics)

— 생각하는 물리

(Thinking Physics)



물리

윤형철 교수

물리 윤형철 교수입니다.

약력

전남과학고등학교 졸업
서울대학교 사범대학 물리교육과 졸업

전 대치 미래탐구
전 대치 새움학원
현 대치 링크물리
현 변리사스쿨 물리 전문교수

개념 POINT

[역학 개관]

물리현상 (문제상황)	→ 물리량	물리법칙
물체의 운동 <표현>	① 시간 ② 위치 ③ 변위 ④ 거리 ⑤ 속도 ⑥ 속력 ⑦ 가속도	없음 (미적분+기하) 그래프 해석
물체의 운동 <원인>	① 힘/알짜 힘 ② 돌림힘/알짜 돌림힘	[뉴턴 운동법칙] - 제1법칙 (관성) - 제2법칙 (질량/가속도) - 제3법칙 (작용/반작용)
충돌/융합/분열(폭발) <순식간>	① 운동량/운동량 변화량 ② 충격량/충격력	① 운동량 보존법칙 ② 충격량-운동량 변화량 정리
물체의 운동 <스칼라적 접근>	① 일 ② 운동에너지 ③ 위치에너지-보존력 ④ 역학적 에너지	① 알짜일-운동에너지 변화량 정리 ② 보존력-위치에너지 관계 ③ 역학적 에너지 보존법칙

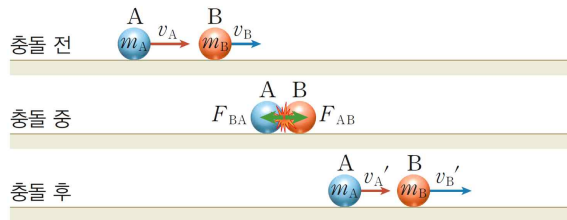
I. 선운동량 (linear momentum)

개념 POINT

물리량 중에는 질량이나 에너지처럼 변화가 일어날 때 항상 일정하게 보존되는 것들이 있다. 이러한 물리량에 관한 보존 법칙은 자연 현상을 설명하는 데 편리하게 이용된다. 운동량도 보존되는 물리량 중 하나로, 운동량 보존 법칙은 충돌이나 분열 등의 현상을 간단하게 분석할 수 있게 해 준다.

1. 직선상에서 두 물체의 충돌 문제

그림과 같이 직선상에서 질량이 m_A , m_B 인 물체 A, B가 각각 v_A , v_B 의 속도로 운동하다가 충돌한 후 A가 v_A' 의 속도로 운동하였다면 충돌한 후 B의 속도 v_B' 은 어떻게 구할 수 있을까?



▲ 직선상에서 두 물체의 충돌

이 문제를 운동 방정식으로 풀려면 B가 A와 충돌하는 동안 받는 힘에 대해 알아야 한다. 그러나 충돌하는 동안 B에 힘이 작용하는 것은 분명하지만, 그 힘의 크기가 시간에 따라 얼마인지 정확하게 알 수는 없으므로, B의 가속도와 충돌 후 속도를 구하는 것도 쉽지 않다. 그런데 앞에서 배운 뉴턴 운동 제3법칙에 의해 A와 B가 충돌하면서 A가 B에 F_{AB} 의 힘을 작용하면, 동시에 B도 A에 크기가 같고 방향이 반대인 F_{BA} 의 힘을 작용하는 것을 알 수 있다. 따라서 A와 B를 고립계로 생각하면, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$F_{AB} + F_{BA} = 0$$

즉, 고립계에서 물체 사이에 작용하는 힘을 모두 더하면 그 합은 0이 된다. 위의 식을 뉴턴 운동 제2법칙에 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$m_A a_A + m_B a_B = m_A \frac{\Delta v_A}{\Delta t} + m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = 0 \rightarrow \frac{\Delta(m_A v_A + m_B v_B)}{\Delta t} = 0$$

위 식으로부터 $m_A v_A + m_B v_B$ 의 값은 시간에 따라 변하지 않고 일정하게 보존되는 것을 알 수 있다. 즉, 고립계에서 각 물체의 질량과 속도의 곱인 mv 라는 물리량의 합은 항상 보존되는데, 이 물리량을 운동량이라고 한다. 이를 통해 충돌한 후 B의 속도 v_B' 을 쉽게 구할 수 있다.

2. 운동량

도로 위에서 트럭과 승용차가 같은 속도로 달리고 있을 때 승용차를 멈추게 하는 것보다 질량이 큰 트럭을 멈추게 하는 것이 더 어렵다. 또, 날아오는 야구공을 손으로 받을 때 야구공의 속도가 빠를수록 손에 미치는 충격이 더 크다. 이와 같이 운동하고 있는 물체의 질량이 크거나 속도가 빠를수록 운동의 효과는 더 큰데, 이와 관련된 물리량이 운동량이다.

(1) **운동량**: 물체가 운동할 때 물체의 질량에 속도를 곱한 물리량을 운동량이라고 한다. 질량이 m 인 물체가 속도 v 로 운동하고 있을 때 운동량 p 는 다음과 같다.

$$\text{운동량} = \text{질량} \times \text{속도}, p = mv \text{ (단위: kg} \cdot \text{m/s)}$$

① **운동량의 방향**: 운동량은 크기와 방향을 모두 갖는 벡터량으로, 운동량의 방향은 속도의 방향과 같다. 직선상에서 물체가 운동할 때 한쪽 방향의 운동량을 (+)라 하면, 반대 방향의 운동량은 (-)로 나타낸다.

② **운동량의 크기**: 질량이 클수록, 속도가 빠를수록 크다.

물체의 속도가 같을 때	물체의 질량이 같을 때
<p>20 m/s 1000 kg 운동량</p> <p>20 m/s 10000 kg 운동량</p>	<p>10 m/s 0.15 kg 운동량</p> <p>20 m/s 0.15 kg 운동량</p>
질량이 작은 승용차보다 질량이 큰 트럭의 운동량이 더 크다.	속도가 느린 야구공보다 속도가 빠른 야구공의 운동량이 더 크다.

(2) **운동량의 변화량**: 운동량의 변화량 Δp 는 나중 운동량 mv 에서 처음 운동량 mv_0 을 뺀 값이다.

$$\Delta p = mv - mv_0$$

운동량은 벡터량이므로, 운동량의 변화량을 계산할 때는 방향을 고려해야 한다.

시선 집중 ★

운동량의 변화량 계산하기

운동량이 증가할 때

$$2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s} \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}$$

$$2 \text{ kg} \times 3 \text{ m/s} - 2 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s} = 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동량이 감소할 때

$$2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}$$

$$2 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s} - 2 \text{ kg} \times 3 \text{ m/s} = -4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동량의 방향이 반대가 될 때

$$2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot (-3 \text{ m/s})$$

$$2 \text{ kg} \times (-3 \text{ m/s}) - 2 \text{ kg} \times 2 \text{ m/s} = -10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \rightarrow 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동량의 변화량은 처음 운동량의 방향과 같다.

$$6 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동량의 변화량은 처음 운동량의 방향과 반대이다.

$$-6 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \rightarrow 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$-10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동량의 변화량은 처음 운동량의 방향과 반대이다.

(3) **운동량과 힘의 관계**: 달리는 트럭의 브레이크를 밟아 운동 반대 방향으로 힘을 작용하면 트럭의 속도가 감소하여 정지하고, 트럭의 운동량은 0이 된다. 이때 브레이크를 세게 밟아 더 큰 힘을 작용하면 트럭은 더 짧은 시간에 정지한다. 즉, 물체에 작용한 알짜힘이 클수록 시간에 따른 운동량의 변화량이 크다. 이와 같은 물체의 운동량의 변화량과 물체에 작용하는 힘 사이의 관계는 뉴턴 운동 제2법칙을 통해 이끌어 낼 수 있다. 물체의 질량이 일정할 때 운동량과 힘의 관계는 다음과 같다.

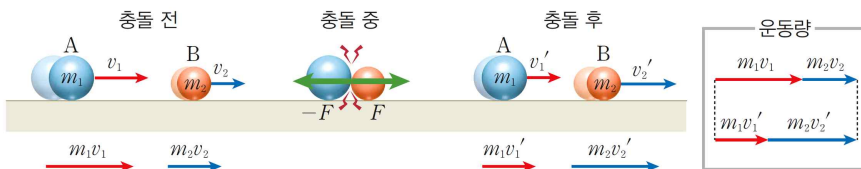
$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

즉, Δt 동안의 운동량의 변화량 Δp 는 그 물체에 작용하는 알짜힘과 같다. 물체의 운동 변화를 나타내기 위해 뉴턴 운동 제2법칙에서는 가속도 a 를 사용하였는데 운동량과 힘의 관계를 통해 운동량 p 의 시간에 대한 변화량을 사용해도 된다는 것을 확인할 수 있다. 위 식은 뉴턴 운동 제2법칙의 일반적인 표현으로, 시간에 따라 속도가 변하는 물체의 운동 이외에도 질량이 변하는 물체의 운동에 적용하여 물체의 운동 변화를 알 수 있다.

3. 운동량 보존 법칙

탐구 1면 64쪽

두 물체가 충돌할 때 각각의 물체의 운동량은 변하지만 두 물체의 운동량의 총합은 충돌 전후 변하지 않고 일정하게 유지된다. 이처럼 외력이 작용하지 않고 물체들 사이에서만 힘이 작용한다면 힘이 작용하기 전후 물체들의 운동량의 총합은 일정하게 보존되는데, 이를 운동량 보존 법칙이라고 한다. 그림과 같이 직선상에서 질량이 m_1 , m_2 인 물체 A, B가 각각 v_1 , v_2 의 속도로 운동하다가 충돌한 후 속도가 v_1' , v_2' 이 되었을 때 다음 식이 성립한다.



$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

충돌 전 운동량의 총합 = 충돌 후 운동량의 총합

(1) 운동량 보존 법칙은 2개 이상의 물체들로 이루어진 물체계에서도 성립한다. 즉, 질량이 m_1 , m_2 , m_3 , ...인 여러 물체들로 이루어진 물체계에서 물체 사이에서만 힘이 작용하여 속도가 m_1 은 v_1 에서 v_1' 으로, m_2 는 v_2 에서 v_2' 으로, ... 되었다면 다음 식이 성립한다.

$$m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + \dots = m_1v_1' + m_2v_2' + m_3v_3' + \dots$$

(2) 운동량 보존 법칙은 두 물체가 충돌할 때 한 물체로 합쳐지는 융합, 한 물체가 2개 이상의 물체로 나누어지는 분열 등의 경우에도 항상 성립한다.

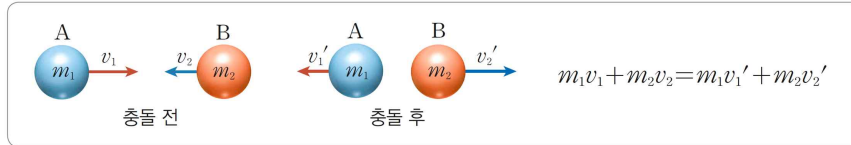
(3) 물체 사이에서만 힘이 작용하는 경우 항상 작용 반작용 법칙이 성립한다. 이때 각 물체에 힘이 작용하는 시간이 같으므로 운동량 변화량의 합은 항상 0이 된다.

(4) 외력이 작용하면 물체계의 전체 운동량은 변한다. 그러나 단단한 물체가 충돌할 때와 같이 물체끼리 힘이 작용하는 시간이 매우 짧을 때(마찰력이나 중력 등 외력에 의한 물체의 속도 변화가 무시될 때) 물체의 운동량의 총합은 거의 보존된다.

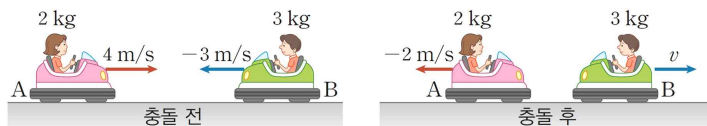
4. 운동량 보존 법칙의 적용

운동량 보존 법칙을 이용하면 물체가 충돌하거나 융합, 분열하는 등의 과정에서 일어나는 속도 변화를 정량적으로 예측할 수 있다.

(1) 두 물체가 충돌하는 경우: 그림과 같이 직선상에서 질량이 m_1 , m_2 인 물체 A, B가 각각 v_1 , v_2 의 속도로 운동하다가 충돌한 후 v_1' , v_2' 의 속도로 운동하였다.

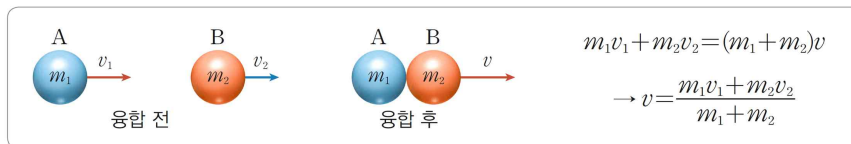


예) 수평면에서 물체 A, B가 충돌할 때 충돌 후 B의 속도 v 는 다음과 같다.

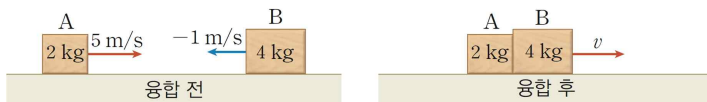


$$2 \text{ kg} \times 4 \text{ m/s} + 3 \text{ kg} \times (-3 \text{ m/s}) = 2 \text{ kg} \times (-2 \text{ m/s}) + 3 \text{ kg} \times v \rightarrow v = 1 \text{ m/s}$$

(2) 두 물체가 한 물체로 융합하는 경우: 그림과 같이 직선상에서 질량이 m_1 , m_2 인 물체 A, B가 각각 v_1 , v_2 의 속도로 운동하다가 충돌한 후 한 물체로 융합하여 v 의 속도로 운동하였다.

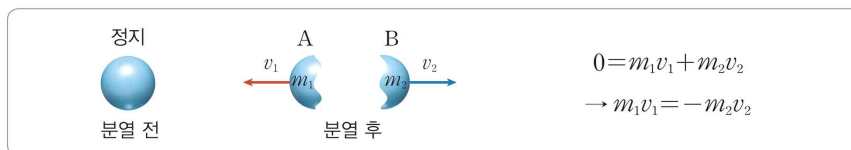


예) 수평면에서 물체 A, B가 충돌한 후 융합하여 한 덩어리가 되어 운동할 때 융합 후 A, B의 속도 v 는 다음과 같다.



$$2 \text{ kg} \times 5 \text{ m/s} + 4 \text{ kg} \times (-1 \text{ m/s}) = (2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \times v \rightarrow v = 1 \text{ m/s}$$

(3) 한 물체가 두 물체로 분열하는 경우: 그림과 같이 직선상에서 정지해 있던 한 물체가 질량이 m_1 , m_2 인 물체 A, B로 분열하여 각각 v_1 , v_2 의 속도로 운동하였다.



예) 수평면에서 정지해 있던 물체가 물체 A, B로 분열하여 운동할 때 분열 후 B의 속도 v 는 다음과 같다.



$$0 = 2 \text{ kg} \times (-2 \text{ m/s}) + 1 \text{ kg} \times v \rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

개념 POINT

II. 충격량(Impluse)

개념 POINT

엑셀러레이터는 자동차의 가속 장치로, 엑셀러레이터를 밟으면 자동차의 속도는 증가하게 된다. 엑셀러레이터를 짧게 밟았을 때보다 길게 밟았을 때 자동차의 속도가 더 많이 증가하는 것처럼 물체의 속도 증가량은 물체에 작용하는 힘의 크기뿐만 아니라 힘이 작용한 시간과도 밀접한 관련이 있다.

1. 충격량

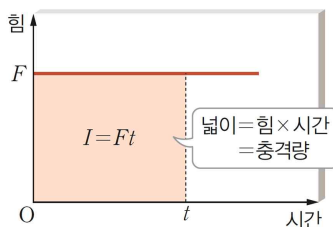
(1) **충격량**: 물체에 작용한 힘에 힘이 작용한 시간을 곱한 물리량을 충격량이라고 한다. 즉, 충격량은 어떤 시간 동안 물체에 작용한 힘의 총량을 의미한다. 물체에 F 의 힘을 시간 t 동안 작용할 때 충격량 I 는 다음과 같다.

$$\text{충격량} = \text{힘} \times \text{시간}, I = Ft \text{ (단위: N} \cdot \text{s)}$$

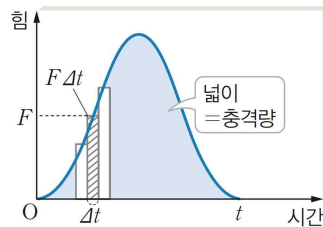
① **충격량의 크기**: 물체에 작용한 힘의 크기와 힘이 작용한 시간에 비례한다.

② **충격량의 방향**: 물체에 작용한 힘의 방향과 같다.

(2) **힘-시간 그래프**: 물체에 작용하는 힘의 크기가 일정할 때 힘-시간 그래프는 그림 (가)와 같다. 이때 그래프와 시간축이 이루는 넓이는 힘 F 와 시간 t 의 곱으로 충격량 I 를 의미한다. 그림 (나)와 같이 물체에 작용하는 힘의 크기가 시간에 따라 변할 때 시간 t 를 매우 짧은 시간 간격 Δt 만큼씩 구분해 주면 Δt 동안의 힘의 크기가 일정하다고 볼 수 있다. 어떤 시각에서 Δt 동안 힘이 F 로 일정하다면 그림 (나)에서 빗금 친 작은 직사각형 넓이에 해당하는 $F\Delta t$ 는 Δt 동안 물체가 받은 충격량이다. 시간 t 동안의 물체가 받은 충격량은 작은 직사각형 넓이를 모두 합한 것과 같으며 이는 그림 (나)에서 그래프와 시간축이 이루는 넓이와 같다.



(가) 힘의 크기가 일정할 때



(나) 힘의 크기가 변할 때

▲ 힘-시간 그래프

(3) **충격량을 크게 하는 방법**: 물체에 작용한 힘의 크기를 크게 하거나 힘이 작용한 시간을 길게 하면 충격량이 커지게 된다. 일상생활에서 충격량을 크게 할 때는 힘의 크기를 크게 하거나 다음과 같이 힘이 작용한 시간을 길게 하는 방법도 이용된다.

총신이 긴 소총



총신이 길수록 총알을 밀어내는 힘을 작용하는 시간이 길어져 충격량이 커지므로 총알이 더 멀리 날아가게 된다.

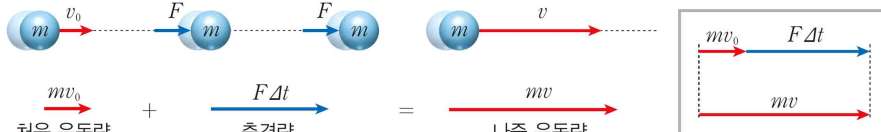
야구의 타법



야구 방망이를 끝까지 휘두르면 야구 방망이가 야구공에 힘을 작용하는 시간이 길어져 충격량이 커지므로 야구공이 더 멀리 날아가게 된다.

2. 충격량과 운동량 변화량의 관계

물체에 힘을 작용하면 물체의 속도가 변하고, 물체의 속도가 변하면 운동량의 변화가 생긴다. 그림과 같이 직선상에서 속도 v_0 로 운동하고 있는 질량이 m 인 물체에 일정한 힘 F 가 시간 Δt 동안 작용하여 속도가 v 로 변했다면 가속도 $a = \frac{v-v_0}{\Delta t}$ 이므로 뉴턴 운동 제2법칙을 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$F = ma = m \frac{v-v_0}{\Delta t} = \frac{mv-mv_0}{\Delta t}$$

이 식의 양변에 시간 Δt 를 곱하면 다음과 같다.

$$F \Delta t = mv - mv_0$$

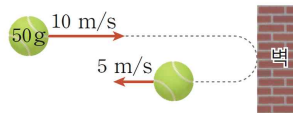
이 식에서 힘과 힘이 작용한 시간의 곱은 충격량이므로 물체에 작용한 충격량은 운동량의 변화량과 같음을 알 수 있다.

$$I = \Delta p = mv - mv_0$$

충격량 = 운동량의 변화량 = 나중 운동량 - 처음 운동량

(1) 충격량과 운동량 변화량의 관계를 이용한 충격량 구하기

질량이 50 g인 테니스공이 10 m/s의 속력으로 벽에 수직으로 충돌한 후 반대 방향으로 5 m/s의 속력으로 튀어 나왔을 때 테니스공과 벽이 받은 충격량은 다음과 같다.



- ① 테니스공의 운동량 변화량의 크기: 운동량의 변화량은 나중 운동량에서 처음 운동량을 빼 값이므로 $|\Delta p| = |0.05 \text{ kg} \times (-5 \text{ m/s}) - 0.05 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}| = 0.75 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 이다.
- ② 테니스공이 받은 충격량의 크기: 충격량은 운동량의 변화량과 같으므로 0.75 N·s이다.
- ③ 벽이 받은 충격량의 크기: 작용 반작용 법칙에 따라 벽이 받은 충격량의 크기는 테니스공이 받은 충격량의 크기와 같으므로 0.75 N·s이다.

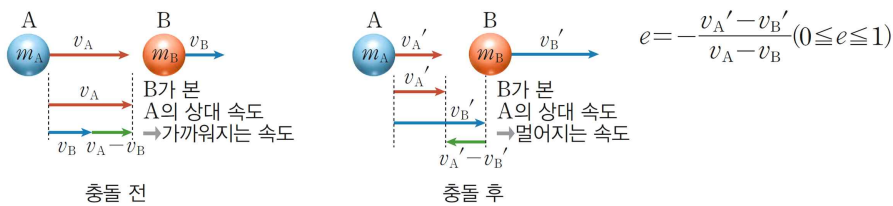
III. 1차원 충돌

개념 POINT

① 반발 계수

찰흙 덩어리는 바닥과 충돌한 후 잘 튀어 오르지 않지만 테니스공은 잘 튀어 오른다. 이처럼 충돌하는 물체가 무엇으로 만들어졌는가에 따라 충돌 후 모습이 다르다.

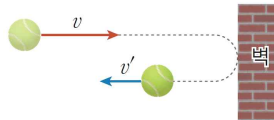
(1) 반발 계수(e): 두 물체가 충돌하기 전 두 물체의 상대 속도에 대한 충돌한 후 상대 속도의 비를 반발 계수라고 하며, 0에서 1 사이의 값을 갖는다. 충돌하는 물체들의 반발하는 정도를 나타내는 반발 계수는 충돌 전의 상대 속도나 물체의 질량에는 관계없고, 두 물체를 구성하는 물질에 따라 결정된다. 충돌하는 물체가 화약 등에 의해 폭발하는 경우에는 폭발에 의해 화학 에너지가 운동 에너지로 변하게 되어 e 가 1보다 큰 값을 갖는다.



(2) 반발 계수를 측정하는 방법

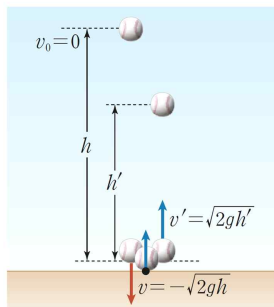
① 공이 벽에 수직으로 충돌한 후 튀어 나오는 경우

운동 상태	<ul style="list-style-type: none"> 충돌 전후 벽은 정지해 있으므로 속도는 0이다. 공은 v의 속도로 벽과 충돌한 후 v'의 속도로 튀어 나왔다.
반발 계수	$e = -\frac{v'}{v}$



② 높이 h 인 곳에서 자유 낙하한 공이 바닥과 충돌한 후 튀어 오르는 경우

운동 상태	<ul style="list-style-type: none"> 충돌 전후 바닥은 정지해 있으므로 속도는 0이다. 공은 충돌 전 v의 속도로 바닥과 충돌한 후 v'의 속도로 튀어 올랐다.
반발 계수	$e = -\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$



등가속도 직선 운동 식인 $2as = v^2 - v_0^2$ 을 통해 충돌 직전 공의 속도 $v = -\sqrt{2gh}$ 이므로 충돌 직후 공의 속도 $v' = -ev = e\sqrt{2gh}$ 이다. 충돌한 후 공이 튀어 올라간 최고 높이를 h'

이라고 하면 $-2gh' = 0^2 - v'^2$ 이므로 $h' = \frac{v'^2}{2g} = e^2h$ 이다. 이때 반발 계수 $e = -\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$

이므로 h 와 h' 를 통해 반발 계수 e 를 구할 수 있다.

2 여러 가지 충돌

(1) 충돌의 종류

물체가 충돌할 때 반발 계수에 관계없이 운동량 보존 법칙이 성립하며, 반발 계수에 따라 물체의 충돌을 완전 탄성 충돌, 비탄성 충돌, 완전 비탄성 충돌로 구분한다.

① 완전 탄성 충돌(탄성 충돌)

$e=1$ 일 때의 충돌로, 원자나 분자들 사이의 충돌처럼 충돌 후에도 물체들의 전체 운동 에너지가 손실되지 않고 보존되는 경우를 완전 탄성 충돌 또는 탄성 충돌이라고 한다. 즉, 충돌 전후의 상대 속도의 크기가 같다. 질량이 같은 움직이는 물체와 정지해 있는 물체가 완전 탄성 충돌을 하면 충돌을 통해 움직이던 물체의 운동량이 정지한 물체에 모두 전달되어 움직이던 물체는 정지하게 되고, 정지해 있던 물체는 튕겨 나가게 된다.

② 비탄성 충돌

$0 < e < 1$ 일 때의 충돌로, 충돌 후 물체들의 전체 운동 에너지가 보존되지 않고 일부 감소하는 경우를 비탄성 충돌이라고 한다. 즉, 충돌 후 상대 속도의 크기가 충돌 전보다 작아진다. 일상생활에서 일어나는 대부분의 충돌은 모두 비탄성 충돌에 해당한다. 비탄성 충돌로 인해 손실된 물체의 운동 에너지는 충돌 후 열에너지, 소리 에너지 등과 같이 다른 에너지로 전환된다.

③ 완전 비탄성 충돌

$e=0$ 일 때의 충돌로, 화살이 표적에 박힐 때처럼 충돌 후 물체들이 한 덩어리가 되어 물체들의 전체 운동 에너지가 보존되지 않고 감소하는 경우를 완전 비탄성 충돌이라고 한다. 즉, 충돌 후 상대 속도는 0이 된다.

충돌의 종류	반발 계수	운동량	운동 에너지
완전 탄성 충돌	$e=1$	보존	보존
비탄성 충돌	$0 < e < 1$	보존	일부 손실
완전 비탄성 충돌	$e=0$	보존	최대 손실

(2) 직선상의 충돌

그림과 같이 직선상에서 질량이 m_1 , m_2 인 두 물체가 각각 v_1 , v_2 의 속도로 운동하다가 충돌한 후 v_1' , v_2' 의 속도로 운동하였다. 반발 계수가 e 일 때 충돌 후 속도 v_1' , v_2' 는 운동량 보존 법칙과 반발 계수의 식을 이용하여 구할 수 있다.



① 운동량 보존 법칙 식: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

② 반발 계수 식: $v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2)$

두 식을 연립하여 풀면 다음과 같다.

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2), \quad v_2' = v_2 + \frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)$$

이때 탄성충돌은 $e=1$ 이므로 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

IV. 2차원 충돌

개념 POINT

그림 1.3.20과 같이 매끄러운 수평면 위를 운동하고 있는 질량 m_1 , 속도 \vec{v}_1 인 물체 A가 정지하고 있는($\vec{v}_2=0$) 질량 m_2 인 물체 B에 비스듬히 충돌하여 속도가 A는 \vec{v}_1' , B는 \vec{v}_2' 로 되었다고 하자. 이때 충격량-운동량 정리에서

$$\text{물체 A : } \vec{F} \cdot \Delta t = m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1$$

$$\text{물체 B : } -\vec{F} \cdot \Delta t = m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2 \quad (m_2 \vec{v}_2 = 0)$$

위 두 식을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

이 식은 평면상에서의 충돌에서도 충돌 전후에 운동량이 보존된다는 것을 보여 준다.

⊙ 평면 또는 공간상에서의 운동량을 벡터적으로 구할 때 평행사변형법으로 구할 수 있다.

⊙ 그림 1.3.21과 같이 운동량을 직교하는 x, y 방향으로 분해할 때 각 방향으로의 운동량 보존 관계가 성립한다.

$$x\text{방향 운동량 보존 : } m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v}_1' \cos \alpha + m_2 \vec{v}_2' \cos \beta$$

$$y\text{방향 운동량 보존 : } 0 = m_1 \vec{v}_1' \sin \alpha - m_2 \vec{v}_2' \sin \beta$$

⊙ 그림 1.3.22의 (가)와 같이 포탄이 떨어지다가 폭발하여 두 조각이 나는 경우에 포탄 조각의 운동량의 벡터합은 원래 포탄의 운동량과 같다. 그림 1.3.22의 (나)와 같은 불꽃 놀이에서 폭죽은 최고 높이에 도달했을 때 공중에서 폭발하여 사방으로 흩어지면서 아름다운 무늬를 만든다. 최고점에 도달한 폭죽은 순간적으로 정지 상태(운동량=0)에 있게 된다. 폭발에 의해 흩어지는 불꽃의 파편들이 내부에서 상호 작용하지만, 폭발 전과 후에 운동량은 보존된다.

그림 1.3.20

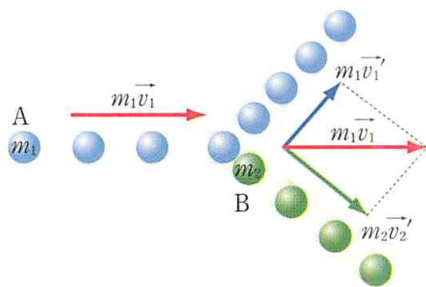


그림 1.3.21

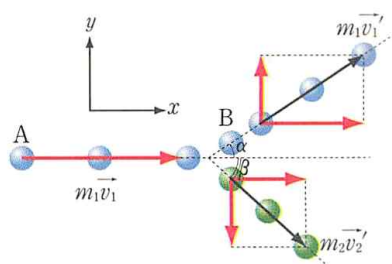
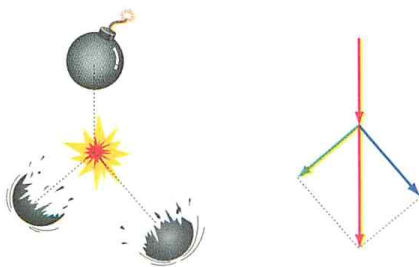
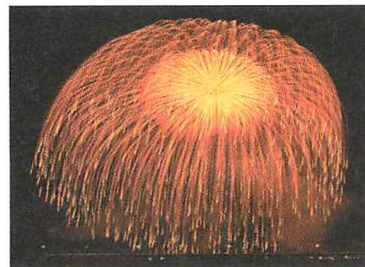


그림 1.3.22 -



(가) 포탄의 폭발



(나) 불꽃놀이

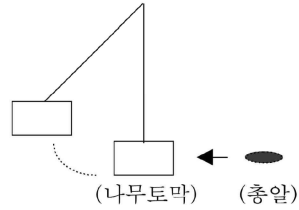
■ 변리사 기출문제

개념 POINT

1. [2003년 변리사] (중) 역학적 에너지 보존 + 충격량-운동량 변화량 정리
 높이가 $20m$ 인 건물의 옥상 가장자리에서 질량 $10kg$ 인 벽돌을 자유낙하시켰다. 벽돌은 낙하하여 지면에 되튐 없이 충돌하여 정지하였다. 다음의 설명 중 틀린 것은? (단, 중력가속도는 $10m/s^2$ 으로 하고, 공기의 저항은 무시한다.)¹⁾
- ① 낙하하기 전 바닥을 기준으로 한 벽돌의 위치에너지는 $2000J$ 이다.
 - ② 땅에 닿기 직전 벽돌의 운동에너지는 $2000J$ 이다.
 - ③ 땅에 닿기 직전 벽돌의 속력은 $20m/s$ 이다.
 - ④ 벽돌이 땅에 충돌할 때 지면에 벽돌이 가한 힘은 $100N$ 이다.
 - ⑤ 벽돌이 땅에 충돌할 때 지면에 가한 충격량은 $200N \cdot s$ 이다.

2. [2003년 변리사] (하) 역학적 에너지 비보존 + 완전 비탄성 충돌

줄에 매달려 있는 $10kg$ 의 나무토막에 수평으로 총을 겨누고 발사했더니 총알이 나무토막에 박혀 나무토막과 함께 밀려 나갔다. 총알의 질량이 $20g$ 이고, 총알의 속력은 $1km/s$ 이었다고 할 때 나무토막에서 발생한 열에너지는 약 얼마인가?²⁾

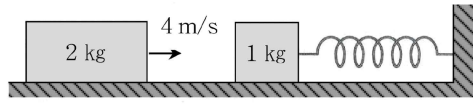


- ① $980J$ ② $9,980J$ ③ $98kJ$ ④ $998kJ$ ⑤ $9,800kJ$

개념 POINT

3. [2005년 변리사] (하) 운동량 보존법칙 + 역학적 에너지 보존법칙

그림과 같이 상수 $k=200N/m$ 인 용수철 한 쪽 끝에는 질량이 $1kg$ 인 물체가 매달려 있고, 다른 쪽 끝은 고정된 벽에 묶여 있다. 평형상태에 있는 이 물체에 질량이 $2kg$ 인 물체가 속력 $4m/s$ 로 달려와 충돌한 후 함께 붙어서 용수철을 압축할 경우, 평형상태를 기준으로 하여 용수철의 길이는 최대 얼마만큼 줄어드는가? (단, 용수철의 질량은 무시되며, 바닥과 물체 사이에는 마찰이 없다고 가정한다.)³⁾

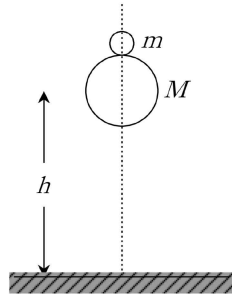


- ① $\frac{2}{5}\sqrt{3}m$ ② $\frac{2}{15}\sqrt{3}m$ ③ $\frac{2}{5}\sqrt{6}m$ ④ $\frac{2}{15}\sqrt{6}m$ ⑤ $\frac{2}{15}\sqrt{10}m$

개념 POINT

4. [2005년 변리사] (상) 역학적 에너지 보존법칙 + 탄성충돌

그림과 같이 질량이 M 인 공 위에 질량이 m 인 공을 수직으로 올려 놓고 높이 h 에서 초기속도 없이 살며시 떨어뜨렸다. 지면에서 수직으로 튀어 올라온 M 이 내려오는 m 을 충돌시켜 다시 수직으로 튀어 올라가게 할 때, 질량이 m 인 공이 올라갈 수 있는 최대 높이를 구하라. (단, 공기의 저항은 없고, 모든 충돌은 탄성충돌이며, 두 공의 크기는 모두 h 에 비해 무시될 만큼 작고, 질량 m 은 M 에 비해 무시될 만큼 적다고 가정한다.)⁴⁾

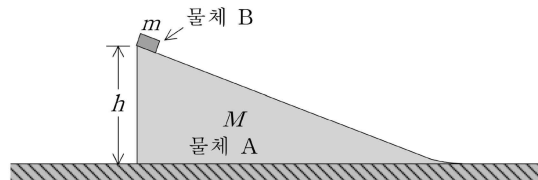


- ① h ② $2h$ ③ $3h$ ④ $4h$ ⑤ $9h$

개념 POINT

5. [2007년 변리사] (중) 운동량 보존법칙 + 역학적 에너지 보존법칙

그림과 같이 질량이 M 이고 높이가 h 인 직각삼각형 쪼의 물체 A가 마찰이 없는 수평면 위에 놓여 있고, 이 물체의 경사면 위쪽 끝에 질량이 m 인 물체 B가 놓여 있다. 초기에 물체 A와 B가 정지상태에 있다가 물체 B가 경사면을 내려오면서 물체 A는 왼쪽으로 밀려간다. 물체 B가 경사면을 다 미끄러져 내려와 수평면에서 움직일 때, 물체 A의 속력은 얼마인가? 물체 B의 크기는 높이에 비하여 무시할 수 있으며, 두 물체 A와 B 사이에 마찰은 없다. (중력가속도는 g 라 한다.)⁵⁾



① $\sqrt{\frac{2mgh}{M}}$

② $\frac{\sqrt{2gh}}{(1 + \frac{M}{m})}$

③ $\sqrt{\frac{2gh}{(1 + \frac{M}{m})}}$

④ $\sqrt{\frac{2gh}{(1 + \frac{M}{m})} \frac{M}{m}}$

⑤ $\frac{\sqrt{2gh}}{(1 + \frac{M}{m})} \frac{M}{m}$

개념 POINT

6. [2011년 변리사] (하) 충격량-운동량 변화량 정리/작용 반작용 법칙(2003년 기출)

사람 A, B가 같은 속도로 날아가는 질량이 같은 2개의 테니스공에 각각 시간 Δt , $2\Delta t$ 동안 라켓으로 일정한 힘 F_A, F_B 를 가하여 두 공 모두 $-2v$ 의 속도로 날아가게 하였다. 이에 대해 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 공기의 마찰력과 중력에 의한 영향은 무시한다.)⁶⁾

<보기>

ㄱ. F_A 의 크기는 F_B 의 크기의 두 배이다.

ㄴ. F_A 와 F_B 의 방향은 서로 다르다.

ㄷ. 테니스공이 A의 라켓에 가한 힘의 크기는 F_A 의 크기와 같다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

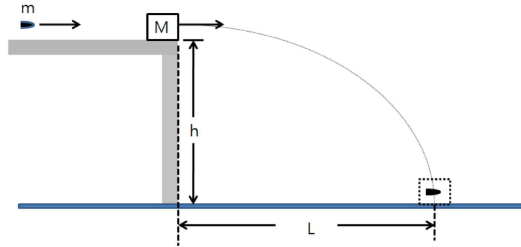
④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

개념 POINT

7. [2013년 변리사] (중) 운동량 보존 + 수평투사 운동 + 역학적 에너지 보존

질량 $M=1.00\text{kg}$ 인 나무토막이 높이가 $h=1.25\text{m}$ 인 탁자 끝에 놓여 있다. 질량 $m=10.0\text{g}$ 인 총알이 발사되어 바닥에 평행한 방향으로 나무토막에 박힌 후 탁자로부터 거리 $L=8.00\text{m}$ 인 지점에 떨어졌다. 나무토막에 입사되기 직전 총알의 속력(m/s)은? (단, 나무토막과 탁자 사이의 마찰은 무시하고, 충돌 후 나무토막과 총알의 운동은 질점 운동으로 가정한다. 중력가속도의 크기는 10m/s^2 이다.)⁷⁾

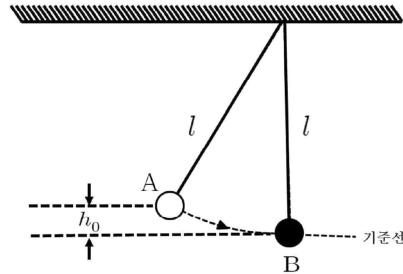


- ① 202 ② 404 ③ 808 ④ 1,616 ⑤ 3,232

개념 POINT

8. [2014년 변리사] (중) 완전비탄성 충돌 + 역학적 에너지 보존

그림은 줄에 매달려 있는 공 A를 기준선에서 높이 h_0 만큼 당겼다가 놓은 후 공B와 충돌하는 모습을 나타낸 것이다. A와 B의 질량은 각각 M 과 $3M$ 이고, 줄의 길이는 l 이다. 두 공이 완전비탄성충돌 후 공은 기준선으로부터 최고높이 h 까지 올라간다. h 를 h_0 의 함수로 표시한 것중 옳은 것은? (단, 공의 크기, 공기의 저항 및 줄의 질량은 무시한다.)⁸⁾

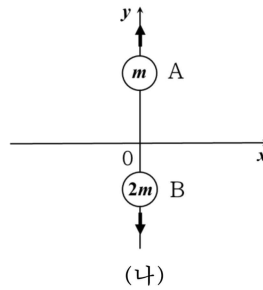
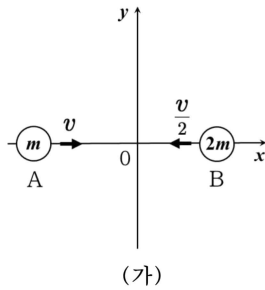


- ① $\frac{1}{16}h_0$ ② $\frac{1}{16}h_0$ ③ $\frac{1}{16}h_0$ ④ $\frac{1}{16}h_0$ ⑤ $\frac{1}{16}h_0$

개념 POINT

9. [2019년 변리사] (상) 2차원 충돌

그림 (가)는 마찰이 없는 xy 평면에서 질량이 각각 $m, 2m$ 인 물체 A, B가 축을 따라 서로 반대 방향으로 등속 운동하는 것을 나타낸 것이다. A, B의 속력은 각각 $v, \frac{v}{2}$ 이다. $t=0$ 일 때 A와 B는 원점에서 탄성충돌한 후, 그림 (나)와 같이 축을 따라 등속 직선 운동한다. $t=t_1$ 일 때, A와 B 사이의 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)⁹⁾



- ① vt_1 ② $\sqrt{2}vt_1$ ③ $\frac{3}{2}vt_1$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}vt_1$ ⑤ $3vt_1$

개념 POINT

10. [2020년 변리사] (상) 운동량 보존법칙 + 질량중심

질량이 각각 $60kg$, $90kg$ 인 갑과 을이 마찰이 없는 평면 위에 정지해 있다. 갑은 x 축의 원점에 있고, 을은 $x=+10m$ 지점에 있다. 갑과 을은 줄의 양 끝을 잡고 있다가, 어느 순간 줄을 마주 잡고 끌어당겨서 갑과 을이 가까워지고 있다. 다음 물음에 답하시오. (단, 공기저항과 줄의 질량은 무시하고, 줄의 길이는 늘어나지 않는다.)¹⁰⁾

ㄱ. 갑의 속도가 $+0.3\hat{i}m/s$ 일 때, 을의 속도 $\vec{v}_을$ 은? (단, \hat{i} 는 $+x$ 방향의 단위벡터이다.)

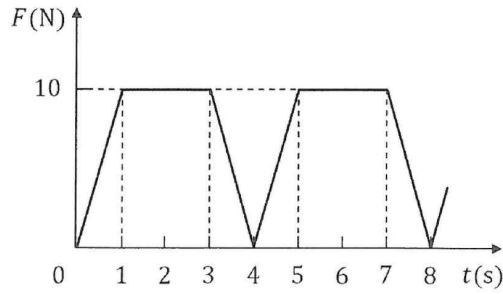
ㄴ. 갑과 을이 처음 만나는 지점의 x 좌표는?

- ① ㄱ: $\vec{v}_을 = -0.15\hat{i}m/s$ ㄴ: $+6m$
- ② ㄱ: $\vec{v}_을 = -0.15\hat{i}m/s$ ㄴ: $+8m$
- ③ ㄱ: $\vec{v}_을 = -0.20\hat{i}m/s$ ㄴ: $+6m$
- ④ ㄱ: $\vec{v}_을 = -0.20\hat{i}m/s$ ㄴ: $+8m$
- ⑤ ㄱ: $\vec{v}_을 = -0.25\hat{i}m/s$ ㄴ: $+8m$

개념 POINT

11. [2022년 변리사] (하) 충격량-운동량 변화량 정리

그림은 수평면상의 한 지점에 정지해 있던 질량 $2kg$ 인 물체에 시간 $t=0$ 에서 $+x$ 방향으로 작용하는 알짜힘의 크기 F 를 시간 t 에 따라 나타낸 것이다.



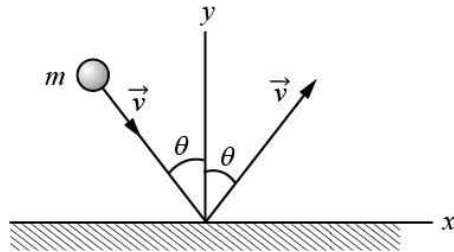
$t=8s$ 인 순간, 물체의 속력은?¹¹⁾

- ① $20m/s$ ② $30m/s$ ③ $40m/s$ ④ $60m/s$ ⑤ $80m/s$

개념 POINT

■ 개념확인문제

12. 그림은 질량 m 인 공이 v 의 속력으로 수직 벽에 부딪혀 속력의 변화 없이 튕겨 나가는 모습을 위에서 내려다 본 모습을 나타낸 것이다.¹²⁾

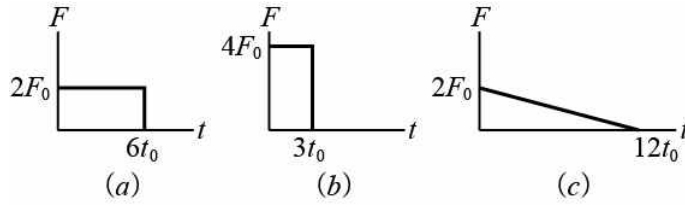


- (1) $\Delta \vec{p}_x$ 의 크기는?
- (2) $\Delta \vec{p}_y$ 의 크기와 방향은?
- (3) $\Delta \vec{p}$ 의 크기와 방향은?

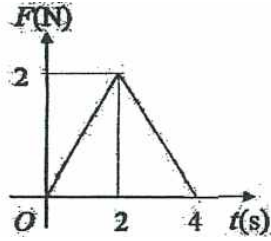
개념 POINT

13. 그림은 충돌하는 물체에 작용하는 힘의 크기를 시간에 대한 함수로 나타낸 그래프이다. 물체에 작용한 충격량의 크기가 큰 순서대로 나열하여라.¹³⁾

개념 POINT



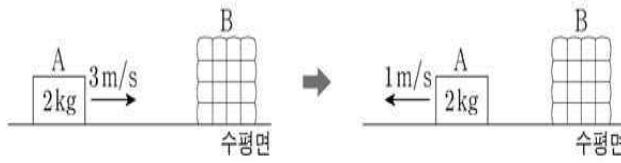
14. 아래 그림은 질량 2kg 의 물체에 작용하는 힘 F 의 크기를 시간 t 에 따라 나타낸 그래프이다. 힘의 방향은 변하지 않는다. 물체가 처음에 정지해 있었다면 물체의 나중 속력은 얼마인가?¹⁴⁾



- ① 0.5m/s ② 1m/s ③ 2m/s
 ④ 4m/s ⑤ 8m/s

개념 POINT

15. 그림과 같이 질량이 2kg 인 물체 A가 3m/s 의 속력으로 등속도 운동을 하다가 물체 B와 0.2s 동안 충돌한 후 반대방향으로 1m/s 의 속력으로 등속도 운동을 한다.

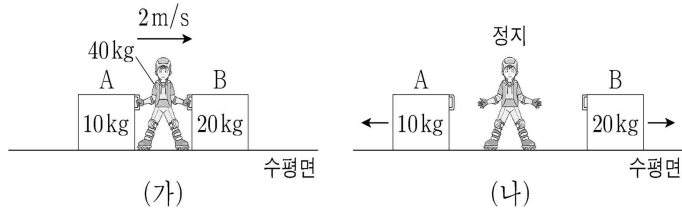


충돌하는 동안 A가 B로부터 받은 평균 힘의 크기는?¹⁵⁾

- ① 10N ② 20N ③ 30N ④ 40N ⑤ 50N

개념 POINT

16. 그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 질량이 40 kg 인 학생이 질량이 각각 10 kg , 20 kg 인 물체 A, B와 함께 2 m/s 의 속력으로 등속도 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 학생이 A, B를 동시에 수평 방향으로 0.5 초 동안 밀었더니, 학생은 정지하고 A, B는 등속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 운동량의 크기는 B가 A의 8배이다.



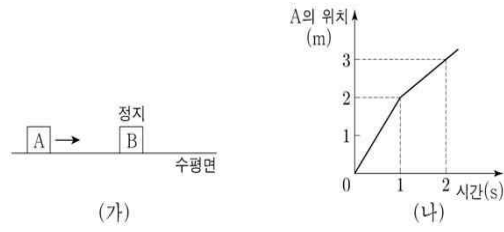
물체를 미는 동안 학생이 B로부터 받은 평균 힘의 크기는? (단, 학생과 물체는 동일 직선상에서 운동한다.)¹⁶⁾

- ① 160 N ② 240 N ③ 320 N ④ 360 N ⑤ 400 N

개념 POINT

17. 그림 (가)는 마찰이 없는 수평면에서 물체 A가 정지해 있는 물체 B를 향해 운동하는 모습을 나타낸 것이고, (나)는 A의 위치를 시간에 따라 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 m_A , m_B 이고, 충돌 후 운동에너지는 B가 A의 3배이다.

개념 POINT



$m_A : m_B$ 는? (단, A와 B는 동일 직선상에서 운동한다.)¹⁷⁾

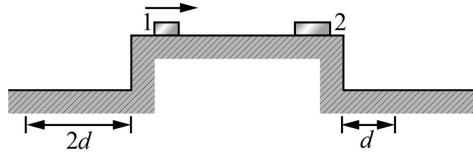
- ① 2:1 ② 3:1 ③ 3:2 ④ 4:3 ⑤ 5:2

18. 초기 속도 15 m/s 로 움직이던 질량 2 kg 의 물체가 정지한 다른 물체와 탄성 충돌한 후, 원래의 방향으로 초기 속도의 $1/3$ 로 움직인다. 충돌 후 다른 물체의 속력은 얼마인가?¹⁸⁾

개념 POINT

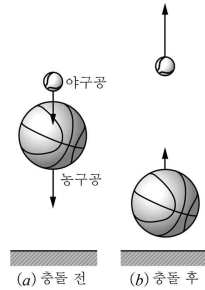
- ① 10 m/s ② 20 m/s ③ 25 m/s ④ 30 m/s ⑤ 40 m/s

19. 아래 그림에서 질량 $m_1 = 0.2\text{kg}$ 의 펙 1이 마찰 없는 실험대 위에서 미끄러지다가 정지해 있는 펙 2와 1차원 탄성충돌을 한다. 펙 2는 실험대에서 거리 d 인 곳에 떨어지고, 펙 1은 충돌로 다시 튕겨서 실험대 반대편에서 거리 $2d$ 인 곳에 떨어진다. 펙 2의 질량은 얼마인가? ¹⁹⁾



개념 POINT

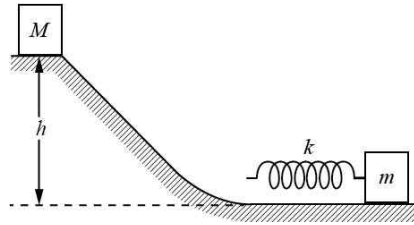
20. 질량 m 인 작은 공이 질량 M 인 큰 공보다 약간 위에 정렬되어 있다. 두 공이 높이 h 에서 동시에 아래로 떨어졌다. 두 공의 반지름은 높이 h 에 비해 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다. 큰 공은 바닥과 탄성충돌을 하고, 작은 공은 큰 공과 탄성충돌을 한다고 하자. 이때 위로 튀어 오르던 큰 공이 작은 공과 충돌하는 순간 속력이 0이 되어 더 이상 위로 올라가지 못하고 다시 떨어졌다고 할 때 다음을 구하라.²⁰⁾



- (1) 두 공의 질량비 m/M 은 얼마인가?
- (2) 큰 공에 맞고 튀어 올라간 작은 공은 얼마나 높이 올라가겠는가?

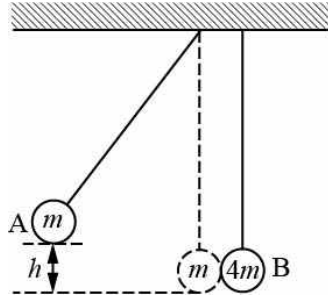
개념 POINT

21. 경사면 위에서 질량 M 인 물체가 높이 h 인 경사면을 미끄러져 내려오고 있다. 이 물체가 바닥에 내려왔을 때 가벼운 용수철이 달려 있는 질량 m 인 물체와 정면으로 충돌하였다. 충돌은 탄성충돌이며 용수철 상수는 k 이다. 두 물체가 충돌한 후 용수철이 최대로 압축되었을 때의 길이를 구하시오. (경사면과 수평면에서 물체들의 마찰이 없으며 바닥의 물체는 정지해 있었다.)²¹⁾



개념 POINT

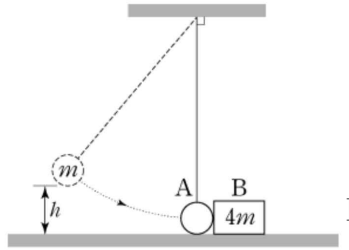
22. 그림과 같이 추의 질량이 m 인 진자 A와 추의 질량이 $4m$ 인 진자 B가 접촉되어 있다. 진자 A를 h 만큼 들어 올려 가만히 놓아 진자 B와 충돌시켰더니 B가 높이 $\frac{h}{9}$ 까지 올라갔다. 다음 물음에 답하시오. (단, 실의 질량은 무시하고, 중력가속도는 g 이다.)²²⁾



- (1) 진자 A와 B가 충돌할 때의 반발계수를 구하시오.
- (2) 진자 A와 B가 첫 번째 충돌을 할 때 손실된 에너지를 구하시오.

개념 POINT

23. 그림과 같이 줄의 끝에 매달린 질량 m 인 물체 A를 수평면으로부터 높이 h 인 곳에서 가만히 놓았더니, A는 마찰이 없는 수평면 위에 정지해 있던 질량 $4m$ 인 물체 B와 최저점에서 탄성충돌을 하였다.

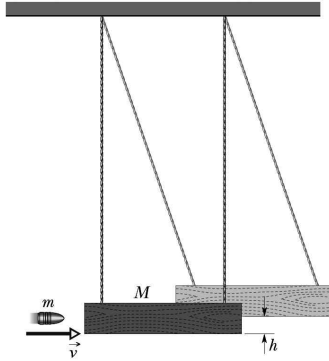


충돌 직전 A의 속력 v_A 와 충돌 직후 B의 속력 v_B 를 각각 구하시오. (단, 중력가속도의 크기는 g 이고, 줄의 질량과 A, B의 크기, 공기 저항은 무시한다. A, B는 동일 연직면에서 운동한다.)²³⁾

개념 POINT

24. 탄동 진자는 총알과 같은 빠른 물체의 속력을 측정하는 데 사용되었다. 질량이 M 인 나무토막을 두 줄을 이용하여 천장에 매단 나무토막을 향해 질량이 m 인 총알을 발사하면 총알이 나무토막에 박혀 나무토막이 그림과 같이 h 만큼 올라갔다. 총알의 속력은 얼마인가?²⁴⁾

개념 POINT



25. 마찰이 없는 수평면에 질량 M 인 큰 나무토막이 놓여 있다. 나무토막을 향하여 질량 m 인 탄환을 발사하였더니 탄환이 수평 방향으로 v 의 속도로 나무토막에 충돌하여 깊이 l 만큼 뚫고 들어간 후 정지하였다.²⁵⁾

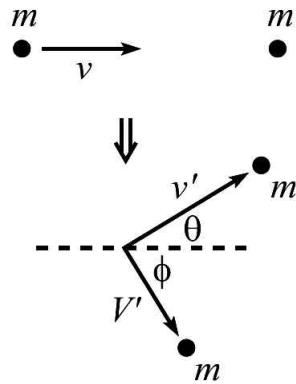
개념 POINT

- (1) 탄환의 최종 속력은 얼마인가?
- (2) 탄환에 대한 나무토막의 저항력이 일정하다면 저항력은 얼마인가?

26. 질량 m_1, m_2 인 입자가 속력 u_1, u_2 로 서로를 향해서 달려와서 충돌한 후 붙어버렸다. 운동 에너지의 손실은 얼마인가? ²⁶⁾

개념 POINT

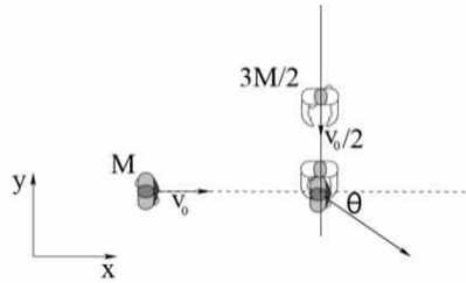
27. 한 당구공이 정지한 동일한 공을 향해 속력 v 로 접근한다. 두 공은 탄성충돌하여, 입사한 공이 산란각 θ 로 튀어 나간다. 이 공의 속력은 얼마인가? 정지해 있던 공이 튀어 나가는 각 ϕ 는 얼마인가?²⁷⁾



개념 POINT

28. 그림과 같이 질량이 각각 M , $3M/2$ 인 두 사람이 그림과 같은 속도로 달리다가 서로 부딪혀 그림과 같은 방향으로 함께 운동한다.²⁸⁾

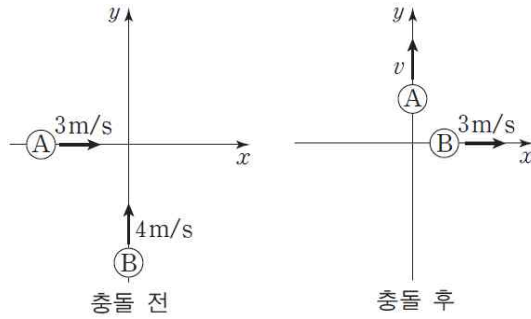
개념 POINT



- (1) 바닥의 마찰을 비롯한 모든 마찰을 무시할 수 있다고 할 때, 두 사람이 충돌 후 함께 움직이는 속력과 각도 θ 를 구하시오.
- (2) 두 사람 중 누가 충돌 과정에서 더 큰 가속도를 경험하는지 설명하시오.

29. 그림은 마찰이 없고 수평인 xy 평면에서 질량이 같은 물체 A, B가 충돌 전과 충돌 후에 운동하는 모습을 나타낸 것이다.

개념 POINT

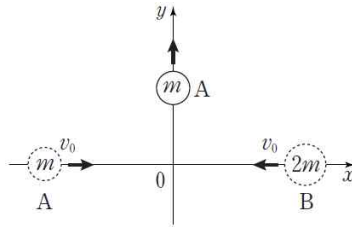


충돌 후 A의 속력 v 는? (단, A, B의 크기는 무시한다.)²⁹⁾

- ① 1m/s ② 2m/s ③ 3m/s ④ 4m/s ⑤ 5m/s

30. 그림과 같이 마찰이 없는 xy 평면에서 $+x$ 방향과 $-x$ 방향으로 각각 속력 v_0 으로 운동하던 물체 A와 B가 원점에서 탄성 충돌한 후, A는 $+y$ 방향으로 등속 운동한다.

개념 POINT



A, B의 질량은 각각 m , $2m$ 이고, 충돌 후 A, B의 속력은 각각 v_A , v_B 이다. $\frac{v_A}{v_B}$ 는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)³⁰⁾

- ① $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ④ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{4}{3}}$

■ 정답과 해설

개념 POINT

1) [정답] ④

[해설]

① $U = mgh = 10 \times 10 \times 20 = 2000J$ (참)

② 역학적 에너지 보존에 의해 $U = K = 2000J$ (참)

③ $U = K$ 에서 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ 이므로 $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 20} = 20m/s$ (참)

④ 충돌시간이 없으므로 지면에 벽돌이 가한 힘은 구할 수 없다.

⑤ 충격량-운동량 변화량 정리에 의해 $I = \Delta p = m\Delta v = 10 \times (0 - 20) = -200N \cdot s$ (참)

2) [정답] ②

[해설]

1. 완전 비탄성 충돌이므로 운동량은 보존되나 역학적 에너지는 보존되지 않는다.

2. 운동량 보존에서 나무토막의 질량을 M , 총알의 질량을 m , 총알의 처음 속도를 v , 충돌 후 합쳐진 속도를 V 라 하면 $mv = (M+m)V$ 에서 $0.02 \times 1000 = (10 + 0.02)V$ 이므로 $V \simeq 2m/s$ 이다.

3. 발생한 열에너지는 운동에너지 변화량과 같으므로

$$Q = \Delta K = \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10 + 0.02) \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 0.02 \times 1000^2 = -9,980J$$

이다.

3) [정답] ④

[해설]

1. 충돌 후 함께 붙었을 때의 속도를 v 라고 하면 운동량 보존법칙에 의해

$$2 \times 4 + 1 \times 0 = (2 + 1)v \text{ 이므로 } v = \frac{8}{3}m/s \text{ 이다.}$$

2. 역학적 에너지 보존에 의해 충돌 후 운동에너지가 탄성 퍼텐셜 에너지로 모두 전환된다.

3. $K = U_s$ 에서 $\frac{1}{2} \times (2 + 1) \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times x^2$ 이므로 최대로 줄어든 길이 x 는

$$\frac{2}{15} \sqrt{6}m \text{ 이다.}$$

4) [정답] ⑤

[해설]

1. 두 공이 높이 h 에서 자유 낙하하여 지면에 도달하기 직전의 속력을 v 라고 하면, 에너지 보존에 의해 $v = \sqrt{2gh}$ 이다.

- 공 M : 지면과 탄성 충돌한 직후, 속력은 그대로이고 방향만 반대가 되어 위로 v 의 속도로 튀어 오른다.

- 공 m : 아직 지면에 닿지 않았으므로 여전히 아래로 v 의 속도로 내려온다.

2. 이제 위로 v 로 올라오는 M 과 아래로 v 로 내려오는 m 이 충돌한다. 탄성충돌 직후 m 의 속력이 v' 이고 문제의 조건에서 $m \ll M$ 이므로, M 의 속도는 충돌 전후에 거의 변하지 않는다고 가정한다. 상대속도 개념을 이용하면 탄성충돌에서 접근 속도와 멀어지는 속도는 같다.

- 충돌 전 M 에 대한 m 의 상대 속도: $v - (-v) = 2v$ (아래 방향)

- 충돌 후 M 에 대한 m 의 상대 속도: $2v$ (위 방향)이어야 합니다.

충돌 후 M 의 속도가 여전히 위로 v 이므로, m 의 나중 속도 $v' = v + 2v = 3v$ 이고 즉, 공 m 은 충돌 직후 위로 $3v$ 의 속력을 갖게 된다.

개념 POINT

3. 역학적 에너지 보존법칙에서 나중 속력 $3v$ 를 가지고 올라갈 수 있는 최대 높이는

$$\frac{1}{2}m(3v)^2 = mgh \text{ 에서 } H = \frac{9v^2}{2g} = \frac{9 \times 2gh}{2g} = 9h \text{ 이다.}$$

5) [정답] ④

[해설]

1. 물체 B가 수평면에 도달했을 때 물체 A의 속력을 V , 물체 B의 수평방향 속력을 v 라고 하면 왼쪽을 (+)로 할 때 운동량 보존법칙에 의해 $0 = MV - mv$ 이므로 $v = \frac{M}{m}V$ 이다.

2. 역학적 에너지 보존법칙에 의해 물체 B의 중력 퍼텐셜 에너지는 두 물체의 나중 운동에너지의 합과 같다.

3. 따라서 $mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}V\right)^2$ 에서 정리하면

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{M}{m}}} \text{ 이다.}$$

6) [정답] ④

[해설]

1. 두 사람 A, B가 친 각각의 공의 운동량 변화량 Δp 는 $-3mv$ 로 같다.

2. $\Delta p = F\Delta t$ 에서 $F_A = \frac{-3mv}{\Delta t}$ 이고 $F_B = \frac{-3mv}{2\Delta t}$ 이므로 $F_A = 2F_B$ 이다. (ㄱ은 참)

3. F_A 와 F_B 의 방향은 같다. (ㄴ은 거짓)

4. F_A 는 A의 라켓이 테니스 공에 가한 힘이고 이 반작용이 테니스공이 A의 라켓에 가한 힘이므로 두 힘은 작용 반작용 법칙에 의해 크기가 같고 방향이 반대이다. (ㄷ은 참)

7) [정답] ④

[해설]

1. 충돌 후 낙하시간 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.25}{10}} = \frac{1}{2}s$ 이다.

2. 충돌 후 수평속도를 V 라 하면 $L = Vt$ 에서 $8 = V \times \frac{1}{2}$ 이므로 $V = 16m/s$ 이다.

3. 충돌 전 총알이 속도를 v 라고 하면 운동량 보존에 의해 $mv = (m + M)V$ 이므로 $0.01 \times v = (0.01 + 1) \times 16$ 에서 $v = 1,616m/s$ 이다.

8) [정답] ①

[해설]

1. 충돌 직전 A의 속력을 v_0 라 하면 역학적 에너지 보존에 의해 $Mgh_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2$ 에서 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ 이다.

2. 완전 비탄성 충돌 후의 속도를 v 라 하면 $Mv_0 = (M + 3M)v$ 에서 $v = \frac{1}{4}v_0 = \frac{1}{4}\sqrt{2gh_0}$ 이다.

3. 다시 역학적 에너지 보존에 의해 $\frac{1}{2}(M + 3M)v^2 = (M + 3M)gh$ 가 되므로 $v = \frac{1}{4}\sqrt{2gh_0}$

를 대입하여 정리하면 $h = \frac{1}{16}h_0$ 이다.

9) [정답] ③

[해설]

- 충돌 전후 x 축 방향 운동량 보존법칙 : $m \times v + 2m \times (-\frac{v}{2}) = 0$
- 충돌 전후 y 축 방향 운동량 보존법칙 : $0 = mv_A + 2mv_B$
- 탄성충돌은 충돌 전후에 운동에너지가 보존되므로

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times 2m \times (\frac{v}{2})^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2} \times 2m \times v_B^2$$
 이고 $v_A = -2v_B$ 이므로 대입하여 계산하면
 $v_A = v, v_B = -\frac{1}{2}v$ 이다.
- 따라서 $t = t_1$ 일 때, A와 B 사이의 거리는 $(v_A - v_B)t = (v + \frac{1}{2}v)t_1 = \frac{3}{2}vt_1$ 이다

10) [정답] ③

[해설]

- 외력이 작용하지 않으므로 운동량 보존법칙이 성립한다.
- $0 = m_{\text{갑}}\vec{v}_{\text{갑}} + m_{\text{을}}\vec{v}_{\text{을}}$ 에서 $0 = 60 \times (+0.3) + 90 \times \vec{v}_{\text{을}}$ 이므로 $\vec{v}_{\text{을}} = -0.20\hat{i}m/s$ 이다.
- 외력이 작용하지 않으므로 두 물체의 질량중심의 위치는 변하지 않는다. 따라서 최종적으로 갑과 을은 질량중심의 위치에서 만나게 된다.

$$x_{\text{com}} = \frac{m_{\text{갑}}x_{\text{갑}} + m_{\text{을}}x_{\text{을}}}{m_{\text{갑}} + m_{\text{을}}} = \frac{60 \times 0 + 90 \times 10}{60 + 90} = +6m$$

11) [정답] ②

[해설]

- $(F-t)$ 그래프 아래의 $8s$ 까지의 면적은 충격량 $I = 60N \cdot s$ 이다.
- 충격량-운동량 변화량 정리에서 $I = \Delta p = m\Delta v = m(v - v_0)$ 이므로
 $60 = 2 \times (v - 0)$ 에서 $t = 8s$ 인 순간의 속력 $v = 30m/s$ 이다.

12)

[정답] (1) 0 (2) $2mv\cos\theta\hat{y}$ (3) $2mv\cos\theta\hat{y}$

[해설] 운동량은 벡터량이다.

$$\text{충돌 전 운동량은 } \vec{p}_i = m(v\sin\theta\hat{i} - v\cos\theta\hat{j})$$

$$\text{충돌 후 운동량은 } \vec{p}_f = m(v\sin\theta\hat{i} + v\cos\theta\hat{j})$$

$$(1) \Delta p_x = 0$$

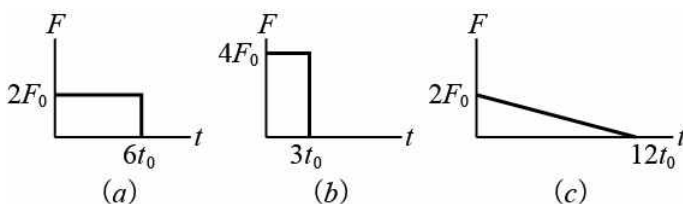
$$(2) \Delta p_y = 2mv\cos\theta\hat{y}$$

$$(3) \Delta p = 2mv\cos\theta\hat{y} \text{이다.}$$

13)

[정답] $12F_0t_0$ 로 모두 같다.

[해설]



$F-t$ 그래프의 밑면적이 충격량이다.

$$(1) \text{에서는 } J_a = (2F_0)(6t_0) = 12F_0t_0$$

$$(2) \text{에서는 } J_b = (4F_0)(3t_0) = 12F_0t_0$$

$$(1) \text{에서는 } J_c = \frac{1}{2}(2F_0)(12t_0) = 12F_0t_0$$

14)

[정답] ③ 2m/s

[해설] 충격량 운동량 정리에 의해

$$I = \int_i^f F dt = \Delta p$$

$F-t$ 그래프의 밑면적이 충격량이므로

$$m(v-0) = \frac{1}{2}F_{\max}\Delta t \text{가 되어서}$$

$$v = \frac{F_{\max}\Delta t}{2m} = \frac{(2\text{N})(4\text{s})}{2(2\text{kg})} = 2\text{m/s}$$

15)

[정답] ④ $F=40\text{N}$

[해설] A가 B와 충돌하는 동안 A가 받은 충격량의 크기(I)는 A의 운동량 변화량의 크기(Δp)와 같다. 충돌하는 동안 A가 B로부터 받은 평균 힘의 크기를 F 라고 하면,

$$I = F \times 0.2\text{s} = \Delta p = 2\text{kg} \times 1\text{m/s} - 2\text{kg} \times (-3\text{m/s}) = 8\text{kg} \cdot \text{m/s} = 8\text{N} \cdot \text{s} \text{이다. 따라서 충돌하는 동안 A가 B로부터 받은 평균 힘의 크기 } F = \frac{8\text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.2\text{s}} = 40\text{N} \text{ 이다.}$$

16)

[정답] ② 240N

[해설]

(가)에서 A, B, 학생의 운동량 합은 $70 \times 2 = 140(\text{kg} \cdot \text{m/s})$ 이다. (나)에서 운동량의 크기는 B가 A의 8배이므로 A의 운동량의 크기를 p 이라하면 B의 운동량의 크기는 $8p$ 이고, A와 B는 서로 반대 방향으로 운동하므로 운동량의 합은 $7p$ 이다. (가)와 (나)에 운동량 보존을 적용하면 $140 = 7p$ 에서 $p = 20(\text{kg} \cdot \text{m/s})$ 이고, (가)→(나) 과정에서 B가 받은 충격량의 크기는 B가 학생으로부터 받은 충격량의 크기와 같으므로 학생이 B로부터 받은 평균 힘의 크기는 $\frac{120 \cdot \text{N} \cdot \text{s}}{0.5\text{s}} = 240\text{N}$ 이다.

17)

[정답] ② $m_A : m_B = 3 : 1$

[해설]

위치-시간 그래프에서 기울기는 물체의 속도를 나타내므로, 충돌 전과 후 A의 속도의 크기는 각각 2m/s, 1m/s임을 알 수 있다. 따라서 충돌 후 B의 속도의 크기를 v_B 라고 하면, 운동량 보존에 의해

$$m_A \times 2\text{m/s} = m_A \times 1\text{m/s} + m_B v_B \text{이므로 } v_B = \frac{m_A}{m_B} \text{이다. 또한 충돌 후 운동에너지는 B가 A의}$$

$$3\text{배이므로 } 3 \times \frac{1}{2}m_A \times (1\text{m/s})^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 \text{에서}$$

$$v_B = \frac{m_A}{m_B} \text{를 대입하면 } m_A = 3m_B \text{ 이다. 따라서 } m_A : m_B = 3 : 1 \text{ 이다.}$$

18)

[정답] ② 20 m/s

[해설] 탄성충돌이므로 충돌 전 후 상대속도가 같다.

$$v - \frac{1}{3}(15 \text{ m/s}) = 15 \text{ m/s} - 0$$

$$\therefore v = 20 \text{ m/s}$$

19)

[정답] 1.0 kg

[해설] 낙하하는 높이가 같으므로 낙하 시간은 동일하다. 따라서 수평 도달 거리의 비가 실험대에서 떠나는 순간의 수평 속도 비와 같다.



즉, 충돌 후 두 물체의 속도 사이의 관계는 $v_1 = -2v_2$ (단, $v_2 > 0$)이다. 탄성 충돌이므로 충돌 전 펙 1의 속도가 v_0 이면,

$$v_0 = v_2 - v_1$$

두 식을 연립하면

$$v_2 = \frac{v_0}{3}, v_1 = -\frac{2}{3}v_0$$

이제 운동량 보존을 적용하면

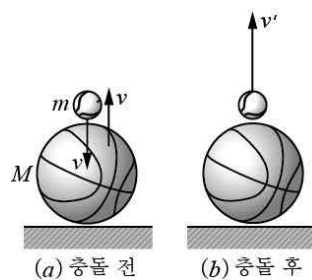
$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v_0 = -\frac{2}{3}m_1 v_0 + \frac{1}{3}m_2 v_0$$

$$\therefore m_2 = 5m_1 = 1.0 \text{ kg}$$

20)

[정답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) $4h$

[해설] (1) 그림과 같이 두 공이 서로 충돌하기 직전 속력은 각각 $v = \sqrt{2gh}$ 이다. 충돌 후 큰 공이 멈춘다면



탄성 충돌이므로 $2v = v'$

운동량 보존에서 $Mv - mv = mv' = 2mv$

$$\therefore \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$$

(2) $v' = 2v = 2\sqrt{2gh} = \sqrt{2g \cdot 4h}$ 이므로 $4h$ 의 높이까지 올라간다. 다른 방법으로는 역학적 에너지 보존에서

$$(M+m)gh = mgh' \Rightarrow h' = \frac{M+m}{m}h = 4h$$

로 확인할 수 있다.

21)

[정답] $\sqrt{\frac{2mMgh}{k(m+M)}}$

[해설] 빗면을 다 내려온 순간 M 의 속도는 $v_i = \sqrt{2gh}$ 이다. 용수철이 최대 압축되는 순간 두 물체의 속도가 같다. 이 때의 속도를 v 라 하면

$$Mv_i = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{M}{M+m} \sqrt{2gh}$$

용수철이 최대 압축된 길이를 x 라 하면, 역학적 에너지 보존에서

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m+M)v^2 = Mgh \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mMgh}{k(m+M)}}$$

예제 22)

[정답] (1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\Delta K = \frac{4}{9}mgh$

[해설] (1) 역학적 에너지 보존에 의해 충돌 직전의 A 의 속력이 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 이며, 충돌 직후의 B 의 속력은 $v_B = \sqrt{2g\left(\frac{h}{9}\right)} = \frac{\sqrt{2gh}}{3} = \frac{1}{3}v_0$ 이다.

운동량 보존을 이용해서 충돌 직후 A 의 속력을 구해보자.

$$\Delta p_B = -\Delta p_A$$

$$4m\left(\frac{1}{3}v_0\right) - 0 = mv_0 - mv_A$$

정리하면 $v_A = -\frac{1}{3}v_0$ 이다.

따라서 반발계수는

$$e = \frac{v_B - v_A}{v_0} = \frac{\left(\frac{1}{3}v_0\right) - \left(-\frac{1}{3}v_0\right)}{v_0} = \frac{2}{3} \text{이다.}$$

(2) 에너지 감소량은

$$K_i - K_f = \frac{1}{2}mv_0^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{3}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}(4m)\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right) - \left(\frac{4}{9}\right) \right\}$$

$$= \frac{2}{9}mv_0^2 = \frac{2}{9}m(2gh)$$

$$= \frac{4}{9}mgh$$

23)

[정답] $v_A = \sqrt{2gh}$, $v_B = \frac{2}{5}\sqrt{2gh}$

[해설]

충돌 전까지 A 의 역학적 에너지가 보존되므로

$$\Delta K = -\Delta U$$

에서 $\frac{1}{2}mv_A^2 - 0 = mgh - 0$ 이므로

$$v_A = \sqrt{2gh} \dots \textcircled{1}$$

이다.

탄성충돌을 하므로 운동량 보존과 에너지 보존을 사용해 보자. 충돌 후 A 의 속도를 v_A' 이라 하면

$$m(v_A - v_A') = 4mv_B$$

$$\frac{1}{2}m(v_A^2 - v_A'^2) = \frac{1}{2}(4m)v_B^2$$

$v_B \neq 0$ 인 충돌하는 해를 찾으려면

$$v_B = \frac{2m}{m+4m}v_A = \frac{2}{5}\sqrt{2gh}$$

이다.

24)

[정답] $\frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$

[해설] 나무 도막이 움직이기 시작할 때의 속력을 V 라고 하면, 역학적 에너지 보존에서

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \quad \therefore V = \sqrt{2gh}$$

충돌 직전 탄환의 속도를 v 라고 하면, 운동량 보존의 법칙에서

$$mv = (m+M)V$$

$$\Rightarrow v = \frac{m+M}{m}V = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$$

25)

[정답] (1) $\frac{m}{m+M}v$ (2) $\frac{mMv^2}{2(m+M)l}$

[해설]

(1) 충돌 전 운동량 = 충돌 후 운동량

$$mv = (m+M)V \quad \therefore V = \frac{m}{m+M}v$$

(2) 탄환이 한 일은 충돌 전후 운동 에너지의 차와 같으므로

$$\begin{aligned} Fl &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 \\ &= \frac{m^2+mM-m^2}{2(m+M)}v^2 \end{aligned}$$

26)

[정답] $\frac{m_1m_2(u_1+u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

[해설]

충돌 후 두 물체의 속력은 $\frac{|m_1u_1-m_2u_2|}{m_1+m_2}$ 가 된다.

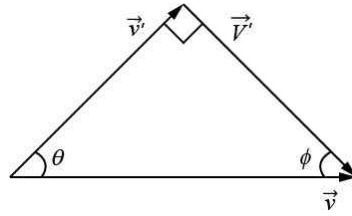
에너지 감소량을 구하면

$$\begin{aligned} -\Delta K &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1u_1-m_2u_2}{m_1+m_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1(m_1+m_2)u_1^2 + m_2(m_1+m_2)u_2^2 - (m_1u_1-m_2u_2)^2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(u_1^2+u_2^2+2u_1u_2)}{m_1+m_2} \\ &= \frac{m_1m_2(u_1+u_2)^2}{2(m_1+m_2)} \end{aligned}$$

27)

[정답] $v' = v\cos\theta, \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$

개념 POINT



개념 POINT

[해설]

$$\text{운동량 보존 } m\vec{v} = m\vec{v}' + m\vec{V}' \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}'$$

$$\text{운동에너지 보존 } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mV'^2 \Rightarrow v^2 = v'^2 + V'^2$$

따라서, 세 속도 Vector 사이에는 다음 그림과 같은 관계가 성립한다.

$$\therefore v' = v \cos \theta$$

$$V' = v \cos \phi = v \sin \theta$$

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

28)

[정답]

$$(1) \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} \simeq 37^\circ \quad v_f = \frac{3}{4}v_0$$

(2) 질량이 작은 M 인 사람의 가속도가 더 크다.

[해설]

(1) 운동량이 보존되므로 충돌 전 후의 운동량의 값은 같다.

$$p_x = Mv_0 + 0$$

$$p_y = 0 - \left(\frac{3}{2}M\right)\left(\frac{1}{2}v_0\right) = -\frac{3}{4}Mv_0$$

θ 가 수평에서 아래 방향이므로

$$\tan \theta = \frac{-p_y}{p_x} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이때 운동량의 크기는 } p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{5}{4}Mv_0$$

$$\text{속력은 } v_f = \frac{p}{M + \frac{2}{3}M} = \frac{\frac{5}{4}Mv_0}{\frac{5}{3}M} = \frac{3}{4}v_0$$

(2) 작용 반작용에 의해 두 사람이 받는 힘의 크기가 같다. 따라서 질량이 작은 M 인 사람의 가속도가 더 크다.

29)

[정답] ④ 4m/s

[해설]

수평방향의 운동량은 보존이 된다.

연직방향의 운동량 보존을 적용하면

$$mv = m(4\text{m/s})$$

따라서 $v = 4\text{m/s}$ 이다.

30)

$$[\text{정답}] \text{ ① } \sqrt{\frac{5}{2}}$$

[해설]

수평 방향의 운동량 보존에 의해

$$2m v_{Bx} = m v_0 + 2m(-v_0) \quad \therefore v_{Bx} = -\frac{1}{2}v_0$$

연직 방향에 운동량 보존에 의해

$$0 = m v_A + 2m v_{By} \quad \therefore v_{By} = -\frac{1}{2}v_A$$

위의 두 식을 에너지 보존식에 대입을 하자.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} (2m) (v_{Bx}^2 + v_{By}^2) &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} (2m) v_0^2 \\ \therefore v_A^2 + 2(v_{Bx}^2 + v_{By}^2) &= 3v_0^2 \end{aligned}$$

대입하면

$$v_A^2 + 2\left\{\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(-\frac{v_A}{2}\right)^2\right\} = 3v_0^2$$

계산하면

$$v_A = \sqrt{\frac{5}{3}} v_0, \quad v_{Bx} = -\frac{1}{2}v_0, \quad v_{By} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} v_0$$

$$\text{따라서 } v_B = \sqrt{\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} v_0\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0$$

$$\text{따라서 } \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ 이다.}$$

개념 POINT